7 класс

1. На банковском счету Володи лежит 5000 рублей. Банк разрешает совершать со счетом операции только двух видов: снимать 3000 рублей или добавлять 1980 рублей. Какую максимальную сумму Володя может снять со счета, если других денег у него нет?

Решение.

Поскольку 3000 и 1980 делятся на 60, Володя сможет снять лишь сумму, кратную 60 рублям. Максимальное число, кратное 60 и не превосходящее 5000, - это 4980.

Докажем, что снять 4980 рублей возможно. Произведем следующие операции: 5000-3000=2000, 2000+1980=3980, 3980-3000=980, 980+1980=2960, 2960+1980=4940. Сумма, лежащая на счете, уменьшилась на 60 рублей.

Проделав аналогичную процедуру 16 раз, Петя снимет 960 рублей. Затем он может снять 3000, положить 1980 и снова снять 3000. В результате у него будет 4980 рублей.

1. Вы прибыли на остров, где живут только два племени: рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы — всегда лгут. Пройдя по берегу, вы увидели, что вокруг костра по кругу сидят рыцари и лжецы – всего 2016 человек. Каждый из них сделал заявление: «Все кроме, быть может, меня и моих соседей – лжецы". Сколько рыцарей сидит у костра?

Решение.

Все не могут быть лжецами – тогда все заявления были бы истинными. Значит, есть рыцарь. Все, кроме, быть может, его двух соседей, – лжецы. Оба соседа не могут быть лжецами – тогда они сказали бы правду; оба не могут быть рыцарями – тогда бы они солгали. Единственная оставшаяся возможность – один сосед — лжец, другой – рыцарь (то есть два рыцаря рядом, остальные — лжецы) удовлетворяет условиям задачи.

1. Номер автобусного билета – шестизначное число. Билет называется счастливым, если сумма трёх первых цифр номера равна сумме последних трёх цифр. Докажите, что сумма всех номеров счастливых билетов делится на 13.

Решение.

Если счастливый билет имеет номер А, то билет с номером В=999999–А также счастливый, при этом А и В различны. Поскольку А+В=999999=1001·999=13·77·99 делится на 13, то и сумма номеров всех счастливых билетов делится на 13.

1. Могут ли длины высот треугольника относиться друг к другу как 1:2:3? Ответ обосновать.

Решение.

Пусть S – площадь этого треугольника, a, b и c – длины его сторон. Тогда длины высот равны 2S/a, 2S/b и 2S/c. Значит, a:b:c = 1:1/2:1/3, что, как нетрудно видеть, противоречит неравенству треугольника.

Ответ: нет, не могут.

1. Зарядки аккумулятора мобильного телефона болтушки Вари хватает на 6 часов разговора либо на 210 часов ожидания. При посадке в поезд зарядка была полная, а в момент выхода из поезда телефон Вари полностью разрядился. Сколько времени Варя ехала в поезде, если она говорила по телефону ровно половину времени поездки?

Решение.

Поскольку в режиме разговора аккумулятора хватает на 6 часов, то за 1 час аккумулятор в режиме разговора разрядится на 1/6 часть. Аналогично, в режиме ожидания за 1 час аккумулятор разрядится на 1/210 часть. Пусть t - время поездки. Тогда, во время поездки Варя разговаривала по телефону t/2, а в режиме ожидание телефон находился t/2. В поездке, за время разговора t/2 аккумулятор разрядился на (t/2)\*1/6 часть, за время ожидания – на (t/2)\*1/210 часть. Всего за время поездки аккумулятор разрядился на (t/2)\*1/6+(t/2)\*1/210 часть, что по условию задачи составляет полную емкость аккумулятора, то есть 1.

Отсюда получаем t=35/3 часа=11 часов 40 минут.

7 класс

1. На банковском счету Володи лежит 5000 рублей. Банк разрешает совершать со счетом операции только двух видов: снимать 3000 рублей или добавлять 1980 рублей. Какую максимальную сумму Володя может снять со счета, если других денег у него нет?

Решение.

Поскольку 3000 и 1980 делятся на 60, Володя сможет снять лишь сумму, кратную 60 рублям. Максимальное число, кратное 60 и не превосходящее 5000, - это 4980.

Докажем, что снять 4980 рублей возможно. Произведем следующие операции: 5000-3000=2000, 2000+1980=3980, 3980-3000=980, 980+1980=2960, 2960+1980=4940. Сумма, лежащая на счете, уменьшилась на 60 рублей.

Проделав аналогичную процедуру 16 раз, Петя снимет 960 рублей. Затем он может снять 3000, положить 1980 и снова снять 3000. В результате у него будет 4980 рублей.

1. Вы прибыли на остров, где живут только два племени: рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы — всегда лгут. Пройдя по берегу, вы увидели, что вокруг костра по кругу сидят рыцари и лжецы – всего 2016 человек. Каждый из них сделал заявление: «Все кроме, быть может, меня и моих соседей – лжецы". Сколько рыцарей сидит у костра?

Решение.

Все не могут быть лжецами – тогда все заявления были бы истинными. Значит, есть рыцарь. Все, кроме, быть может, его двух соседей, – лжецы. Оба соседа не могут быть лжецами – тогда они сказали бы правду; оба не могут быть рыцарями – тогда бы они солгали. Единственная оставшаяся возможность – один сосед — лжец, другой – рыцарь (то есть два рыцаря рядом, остальные — лжецы) удовлетворяет условиям задачи.

1. Номер автобусного билета – шестизначное число. Билет называется счастливым, если сумма трёх первых цифр номера равна сумме последних трёх цифр. Докажите, что сумма всех номеров счастливых билетов делится на 13.

Решение.

Если счастливый билет имеет номер А, то билет с номером В=999999–А также счастливый, при этом А и В различны. Поскольку А+В=999999=1001·999=13·77·99 делится на 13, то и сумма номеров всех счастливых билетов делится на 13.

1. Могут ли длины высот треугольника относиться друг к другу как 1:2:3? Ответ обосновать.

Решение.

Пусть S – площадь этого треугольника, a, b и c – длины его сторон. Тогда длины высот равны 2S/a, 2S/b и 2S/c. Значит, a:b:c = 1:1/2:1/3, что, как нетрудно видеть, противоречит неравенству треугольника.

Ответ: нет, не могут.

1. Зарядки аккумулятора мобильного телефона болтушки Вари хватает на 6 часов разговора либо на 210 часов ожидания. При посадке в поезд зарядка была полная, а в момент выхода из поезда телефон Вари полностью разрядился. Сколько времени Варя ехала в поезде, если она говорила по телефону ровно половину времени поездки?

Решение.

Поскольку в режиме разговора аккумулятора хватает на 6 часов, то за 1 час аккумулятор в режиме разговора разрядится на 1/6 часть. Аналогично, в режиме ожидания за 1 час аккумулятор разрядится на 1/210 часть. Пусть t - время поездки. Тогда, во время поездки Варя разговаривала по телефону t/2, а в режиме ожидание телефон находился t/2. В поездке, за время разговора t/2 аккумулятор разрядился на (t/2)\*1/6 часть, за время ожидания – на (t/2)\*1/210 часть. Всего за время поездки аккумулятор разрядился на (t/2)\*1/6+(t/2)\*1/210 часть, что по условию задачи составляет полную емкость аккумулятора, то есть 1.

Отсюда получаем t=35/3 часа=11 часов 40 минут.