11 класс

1. Пусть . Решите уравнение .

Решение.

Заметим, что . Тогда . Отсюда получим .

1. Плоская выпуклая фигура ограничена отрезками AB и AC и дугой BC некоторой окружности. Постройте какую-нибудь прямую, которая делит пополам:

а) периметр этой фигуры; б) ее площадь.

Решение.

а) Достаточно провести прямую через середину дуги и середину ломаной BAC.

б) Пусть A - вершина угла, B и C - концы дуги, D - ее середина. Сегменты, опирающиеся на хорды BD и DC, равны. Поэтому достаточно провести через точку D прямую, которая делит пополам площадь четырехугольника ABDC.



Проведем через середину диагонали BC прямую l, параллельную AD. Пусть, для определенности, l пересекает отрезок AB (случай пересечения l с отрезком AC рассматривается аналогично). Пусть E - точка пересечения l и AB; прямая DE - искомая. Это видно из рассмотрения площадей треугольников ADC, ADE и ADB (с общим основанием AD).

1. На острове 100 рыцарей и 100 лжецов. У каждого из них есть хотя бы один друг. Однажды ровно 100 человек сказали: "Все мои друзья – рыцари", и ровно 100 человек сказали: "Все мои друзья – лжецы". Каково наименьшее возможное количество пар друзей, один из которых рыцарь, а другой лжец?

Решение

Рассмотрим какого-нибудь жителя *А* острова, утверждающего: "Все мои друзья – лжецы". Если *А* – рыцарь, то его друг – лжец. Если *А* – лжец, то его друг – рыцарь. В любом случае *А* входит в пару друзей "разного" сорта. Так как такое высказывание сделали 100 человек, то количество таких пар не может быть меньше, чем  100 : 2 = 50.

*Пример*: пусть 50 рыцарей дружат между собой, 50 лжецов дружат между собой, и есть 50 пар друзей вида "рыцарь – лжец", причём других друзей у жителей из этих пар нет. Тогда каждый из первых двух групп вправе сказать: "Все мои друзья – рыцари", а каждый из третьей группы: "Все мои друзья – лжецы".

1. В жюри из трех человек два члена независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью , а третий для вынесения решения бросает монету (окончательное решение выносится большинством голосов). Жюри из одного человека выносит справедливое решение с вероятностью . Какое из этих жюри выносит справедливое решение с большей вероятностью?

Решение.

Два серьезных члена жюри будут голосовать за справедливое решение с вероятностью , при этом результат голосования третьего члена жюри не существенен. Если же эти судьи расходятся во мнениях, вероятность чего равна

,

то для нахождения вероятности правильного решения это число надо умножить на 1/2. Таким образом, полная вероятность вынесения справедливого решения жюри из трех человек равна

,

что совпадает с соответствующей вероятностью для жюри из одного человека.

Ответ: оба типа жюри имеют одинаковую вероятность вынести правильное решение.

1. Определите знак числа .

Решение.

Рассмотрим функцию . Поскольку , и слева от точки  , а справа — , то  имеет наименьшее значение в точке . Таким образом , то есть



или .

Отсюда получаем, что

, , .

Ответ: .