**ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ГЕОМЕТРИИ**

**2018 год**

**9 класс**

**Задача 1.**

Можно ли поставить на плоскости 100 точек (сначала первую, потом вторую и так далее до сотой) так, чтобы никакие три точки не лежали на одной прямой и чтобы в любой момент фигура, состоящая из уже поставленных точек, имела ось симметрии?

**Решение**

**Ответ:** да. Можно, например, ставить точки на окружности через равные достаточно малые интервалы (как на рисунке, только меньшие).



**Задача 2.**

Существует ли треугольник, градусная мера каждого угла которого выражается простым числом? Если существует, приведите все возможные варианты.

**Решение**

Так как сумма углов треугольника равна 180°, то градусные меры всех углов треугольника не могут выражаться нечётными числами. Следовательно, градусная мера одного из углов равна 2°. Остается подобрать два простых числа, сумма которых равна 178.

 Вот все возможные примеры: 5 + 173, 11 + 167, 29 + 149, 41 + 137, 47 + 131, 71 + 107, 89 + 89.

**Ответ:** Существует.

**Задача 3.**

Биссектриса треугольника делит одну из его сторон на отрезки 3 см и 5 см. В каких границах изменяется периметр треугольника?

**Решение**

  Пусть *BD* – биссектриса треугольника АВС,  *AD* = 3,  *CD* = 5  (см. рис.). По свойству биссектрисы треугольника,  *AB* = 3*x*,  *BC* = 5*x*,  где *x* – коэффициент пропорциональности.



  Периметр *P* треугольника равен   8 + 8*x* = 8(*x* + 1).  Из неравенства треугольника  5*x* – 3*x* < 8 < 5*x* + 3*x*  ⇔  1 < *x* < 4.  Следовательно,  16 < *P* < 40.

**Ответ**

16 < *P* < 40.

**Задача 4.**

Петя утверждает, что он сумел согнуть бумажный равносторонний треугольник так, что получился четырёхугольник, причем всюду трёхслойный.
Как это могло получиться?

**Решение**

Разобьём треугольник на 9 равносторонних треугольников (см. рис.). Загнём "внутрь" части, отмеченные цветом, и получим шестиугольник.



Этот шестиугольник можно перегнуть по любой диагонали, соединяющей противоположные вершины, и получить трёхслойный четырёхугольник (трапецию).

**Задача 5.**

Циркулем и линейкой разбейте данный треугольник на два меньших треугольника с одинаковой суммой квадратов сторон.

**Решение**

Пусть *B* и *C* – острые углы треугольника, тогда высота *AH* попадет на сторону *BC*, а не на ее продолжение. Построим на *BC* такую точку *D*, что  *BD = CH*.  Тогда и  *CD = BH*  (см. рис.).



Треугольники *ABD* и *ACD* – искомые. Действительно, по теореме Пифагора  *AH*2 = *AB*2 – *BH*2 = *AC*2 – *CH*2,  поэтому *AB*2 + *CH*2 = *AC*2 + *BH*2, откуда  *AB*2 + *BD*2 = *AC*2 + *CD*2. Добавив к обеим частям последнего равенства слагаемое *AD*2, получим равенство сумм квадратов сторон для указанных треугольников.