**Возможные варианты решения задач городской олимпиады по геометрии**

**7 класс**

1. Докажите, что у выпуклого многоугольника не может быть более трех острых углов.

**Подсказка**

Сумма все углов выпуклого ***n*** - угольника равна **180°(*n*-2)**.

**Решение**

Пусть острых углов в треугольнике ***k*>3**, тогда сумма тупых углов (обозначим ее ***S***) равна сумме всех углов треугольника без суммы острых углов; если острые углы заменить на прямые, а тупые на развернутые, то получим оценку **180°(*n-k*)>S>180°(*n*-2)-90°*k***. Для ***k***) получим неравенство **180°(*n-k*)&#gt;180°(*n*-2)-90°*k***, решая которое получим ***k*<4**). Замечание. Существуют многоугольники без острых углов (например, правильный шестиугольник), с одним острым углом (постройте семиугольник, используя правильный шестиугольник), с двумя и с тремя острыми углами (остроугольный треугольник).

1. Можно ли из 18 плиток размеров 1\*2 выложить квадрат 6\*6 так, чтобы при этом не получалось ни одного прямого "шва", соединяющего противоположные стороны квадрата и идущего по краям плиток?

Подсказка

При выполнении условия каждый возможный "шов" должен пересекать хотя бы две плитки.

Решение

Если предположить, что квадрат разбит на плитки 1\*1, то всего имеется 5 горизонтальных и 5 вертикальных "швов". Эти "швы" являются потенциальными "швами" при разбиении квадрата на плитки 1\*2. Заметим, что если потенциальный "шов" пересекает ровно одну плитку, то при удалении этой плитки доска будет разделена этим "швом" на две части с нечетным числом клеток 1\*1, каждая из которых разбита на плитки 1\*2 - это очевидное противоречие. Таким образом, если потенциальный "шов" пересекает какую-нибудь плитку 1\*2, то этот потенциальный "шов" пересекает по крайней мере две плитки 1\*2. Каждая плитка пересекаема ровно одним потенциальным "швом", поэтому, чтобы "заблокировать" все 10 потенциальных швов, потребуется не менее 2\*10=20 плиток 1\*2. Поскольку у нас плиток только 18, один из потенциальных "швов" не будет пересекать плиток. Следовательно, этот потенциальный "шов" действительно является "швом".

Ответ

нельзя.

1. На отрезке AB выбрана произвольно точка C и на отрезках AB, AC и BC, как на диаметрах, построены окружности O1, O2 и O3. Через точку C проводится произвольная прямая, пересекающая окружность O1 в точках P и Q, а окружности O2 и O3 в точках R и S соответственно. Доказать, что PR = QS.

**Решение**

Пусть *K*, *L* и *M* — центры окружностей *O*1, *O*2 и *O*3. Достаточно доказать, что *KR* = *KS*. Докажем, что *LRK* = *MKS*. Радиус окружности *O*1 равен сумме радиусов окружностей *O*2 и*O*3, поэтому *LR* = *MK* и *LK* = *MS*. Ясно также, что *RLK* = *KMS* = 180o - 2, где  — угол между прямыми *AB* и *PQ*.

1. *Вершины A, B, C треугольника соединены с точками A1, B1, C1, лежащими на противоположных сторонах (не в вершинах).
Могут ли середины отрезков AA1, BB1, CC1 лежать на одной прямой?*

**Решение**

Средняя линия *B*2*C*2 треугольника *ABC* параллельна основанию *BC*. Отсюда следует, что эта прямая содержит среднюю линию треугольника *CAA*1. Поэтому середина отрезка *AA*1лежит на отрезке *B*2*C*2. Аналогично, середины отрезков *BB*1 и *CC*1 лежат на двух других средних линиях треугольника *ABC* (см. рис.). Поскольку прямая не может пересекать три стороны треугольника во внутренних точках, три указанные точки не могут лежать на одной прямой.



1. На шахматной доске 8×8 отмечены центры всех полей. Можно ли тринадцатью прямыми, не проходящими через эти центры, разбить доску на части так, чтобы внутри каждой из них лежало не более одной отмеченной точки?

Решение

К краю шахматной доски 8×8 прилегает 28 полей. Проведем 28 отрезков, соединяющих центры соседних крайних полей, а также 13 прямых, не проходящих через эти центры. Каждая прямая может пересекать не более двух таких отрезков, поэтому 13 прямых могут пересекать не более 26 отрезков. Следовательно, найдутся по крайней мере два отрезка, не пересекающихся ни с одной из 13 проведенных прямых. Оба конца такого отрезка лежат в одной части.

Ответ

Нельзя.

1. От пирога, имеющего форму выпуклого пятиугольника, можно отрезать треугольный кусок по линии, пересекающей в точках, отличных от вершин, две соседние стороны; от оставшейся части пирога — следующий кусок (таким же образом) и т.д. В какие точки пирога можно воткнуть свечку, чтобы её нельзя было отрезать?

Решение

Ответ: свечку можно воткнуть в одну из точек многоугольника (включая границу), закрашенного на рисунке. Будем решать задачу для произвольного многоугольника. Пусть *A*0*A*1...*A*n - 1 — данный многоугольник, *A*n = *A*0, *A*−1 = *A*n−1. Свечку, воткнутую во внутреннюю точку одного из треугольников *A*i−1*A*i*A*i + 1 (*i* = 0, 1, ..., *n* − 1) или в точку на границе многоугольника *A*0*A*1...*A*n−1, можно отрезать за один разрез. Заметим, что при каждом отрезании треугольного куска множество точек многоугольника, содержащихся в треугольниках вида *A*i - 1*A*i*A*i + 1, не увеличивается (см. рисунок). Следовательно, никакую другую точку многоугольника отрезать нельзя.




Ответ

Свечку можно воткнуть в одну из точек многоугольника (включая границу), закрашенного на рисунке.

1. Дан треугольник ABC. Докажите, что существует два семейства правильных треугольников, стороны которых (или их продолжения) проходят через точки A, B и C. Докажите также, что центры треугольников этих семейств лежат на двух концентрических окружностях.

### Решение

Пусть прямые *FG*, *GE* и *EF* проходят через точки *A*, *B* и *C*, причем треугольник *EFG* равносторонний, т. е. (*GE*, *EF*) = (*EF*, *FG*) = (*FG*, *GE*) = ±60o. Тогда (*BE*, *EC*) = (*CF*, *FA*) = (*AG*, *GB*) = ±60o. Выбрав один из знаков, получим три окружности *S*E, *S*F и *S*G, на которых должны лежать точки *E*, *F* и *G*. Любая точка *E* окружности *S*E однозначно определяет треугольник *EFG*.
Пусть *O* — центр треугольника *EFG*; *P*, *R* и *Q* — точки пересечения прямых *OE*, *OF* и *OG* с соответствующими окружностями *S*E, *S*F и *S*G. Докажем, что *P*, *Q* и *R* — центры правильных треугольников, построенных на сторонах треугольника *ABC* (для одного семейства внешним образом, для другого внутренним), а точка *O* лежит на описанной окружности треугольника *PQR*. Ясно, что  (*CB*, *BP*) = (*CE*, *EP*) = (*EF*, *EO*) = 30o, a  (*BP*, *CP*) = (*BE*, *EC*) = (*GE*, *EF*) = ±60o. Поэтому  (*CB*, *CP*) = (*CB*, *BP*) + (*BP*,*CP*) = ±30o. Следовательно, *P* — центр правильного треугольника со стороной *AB*. Для точек *Q* и *R* доказательство аналогично. Треугольник *PQR* равносторонний, причем его центр совпадает с точкой пересечения медиан треугольника *ABC*. Можно проверить, что  (*PR*, *RQ*) = 60o = (*OE*, *OG*) = (*OP*, *OQ*), т. е. точка *O* лежит на описанной окружности треугольника *PQR*.